

Algebra vectorial

Campos escalares y vectoriales. Notación.

Un **campo** es una función que asigna un valor de una propiedad física o matemática a cada punto del espacio.

Si el valor asignado es un **escalar** (un único número - real o complejo) se dice que el campo es escalar (p.ej., el campo de temperaturas en una barra uno de cuyos extremos se halla dentro de una llama: a cada punto de la barra el campo le asigna un número real asociado a la propiedad temperatura).

Si el valor asignado es un **vector** (un ente que tiene magnitud, dirección y sentido - generalmente definido por sus tres componentes en un sistema de referencia) decimos que el campo es vectorial (p.ej., el campo gravitatorio en los alrededores de un planeta, el campo eléctrico generado por un cuerpo conductor cargado, etc.).

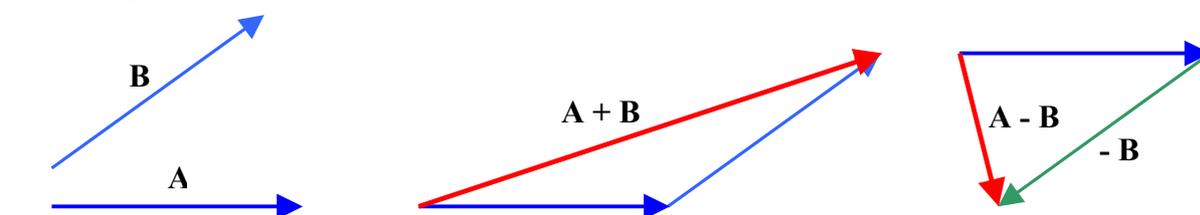
En este texto usaremos una notación para distinguir escalares de vectores. Las cantidades escalares se escribirán en *cursiva*, mientras que las cantidades vectoriales se escribirán en **negrita**. Por ejemplo, el campo de temperaturas en la barra será dado por la función escalar $T(\mathbf{r})$ donde \mathbf{r} es el vector de posición que define la posición de cada punto de la barra respecto de un sistema de coordenadas dado.

Los **versores** (vectores de magnitud unitaria) se distinguen usando un acento circunflejo:

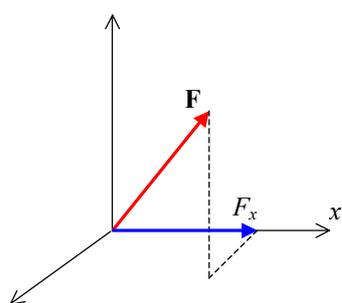
$$\hat{\mathbf{x}} \Rightarrow |\hat{\mathbf{x}}| = 1$$

Operaciones con vectores

Suma algebraica de vectores: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$



La suma algebraica de dos (o más) vectores es otro vector.



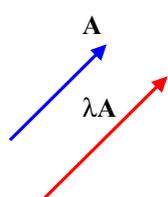
En un sistema de coordenadas dado se puede expresar un vector como la suma de sus **componentes**, que son los vectores proyección sobre cada dirección coordenada. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}$$

La suma algebraica de dos (o más) vectores implica sumar algebraicamente sus componentes homólogas:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x) \hat{\mathbf{x}} + (A_y \pm B_y) \hat{\mathbf{y}} + (A_z \pm B_z) \hat{\mathbf{z}}$$

Multiplicación de un vector por un escalar: $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A}$.

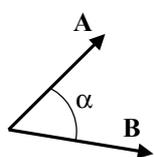


Es otro vector cuya magnitud es λ veces la del vector original: $|\mathbf{C}| = |\lambda \mathbf{A}|$, y se conserva la dirección (el vector resultante es paralelo al vector original). El sentido del vector resultante coincide con el del vector original o cambia según λ sea positivo o negativo.

Producto escalar: $f = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos \alpha$

donde α es el ángulo formado entre \mathbf{A} y \mathbf{B} . Es un escalar. **Ejemplo: trabajo de una fuerza.**

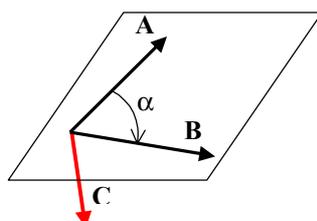
La expresión del producto escalar según las componentes de los vectores es:



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

A partir del producto escalar se puede obtener el **ángulo** entre dos vectores:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \right)$$



Producto vectorial: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{C}| = C = A B \sin \alpha$

donde α es el ángulo formado entre \mathbf{A} y \mathbf{B} . El producto vectorial es un vector, cuyo sentido surge de la regla de la mano derecha.

Ejemplo: momento de una fuerza.

La expresión del producto vectorial según las componentes de los vectores es:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$

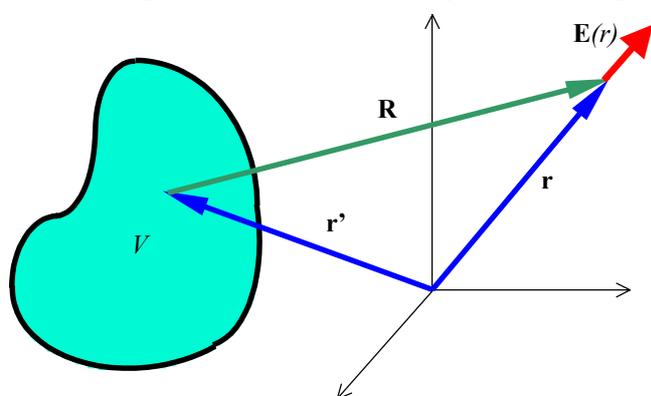
Producto mixto: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ Es un escalar.

Doble producto vectorial: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Es un vector.

Los paréntesis son importantes: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$

Sistemas de referencia o referenciales

La posición de eventos en el espacio se define respecto de un punto fijo llamado **origen de coordenadas**. La definición de un origen de coordenadas y un origen de tiempos¹⁴ crea un **sistema de referencia** o **referencial**. El **vector posición** es el vector que se dirige desde el origen de coordenadas hasta la posición a definir. La posición de un punto en el espacio respecto a un origen de coordenadas se determina mediante el vector posición. Por las necesidades de la descripción de los campos, es necesario distinguir entre las posiciones de puntos fuente y puntos campo.



El **punto fuente** describe la posición de las fuentes de campo (p.ej., las cargas). Se distingue por **coordenadas primadas**: $\mathbf{r}' = (x', y', z')$

El **punto campo** describe la posición del punto donde se desea calcular el campo. Se distingue por usar **coordenadas no primadas**: $\mathbf{r} = (x, y, z)$

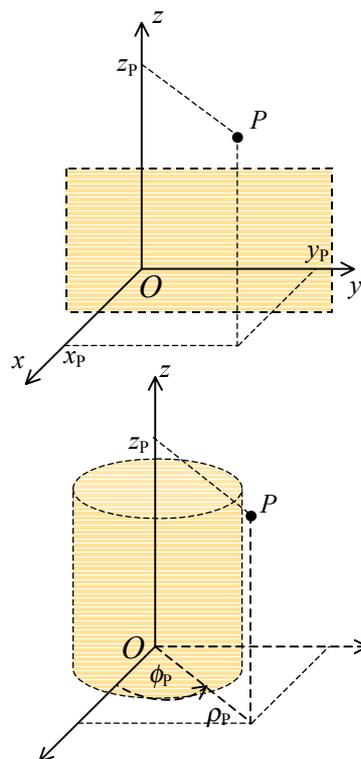
¹⁴ En este texto consideraremos solamente referenciales inerciales, donde se cumplen las ecuaciones de la mecánica de Newton. Dentro de la perspectiva de las aplicaciones a la ingeniería, consideramos solamente velocidades pequeñas respecto a la velocidad de la luz, por lo que no es necesario usar correcciones relativistas y entonces la posición y el tiempo siguen las reglas de la mecánica de Newton.

Sistemas de coordenadas: cartesiano, cilíndrico y esférico.

Para operar en un sistema de referencia es útil definir coordenadas, que son variables escalares que permiten expresar los campos escalares y vectoriales así como los elementos de arco, superficie y volumen que aparecen en las ecuaciones integrales.

La elección de un **sistema de coordenadas** depende de la **simetría** del problema físico en cuestión. En general se trata de elegir un sistema donde las superficies de potencial y/o campo constante sean superficies de coordenadas constantes. Por ejemplo, en un problema electrostático donde hay un conductor esférico cargado es conveniente usar un sistema de coordenadas esférico centrado en el conductor, ya que la superficie esférica del conductor (que en tal elección de coordenadas es una superficie de coordenada r constante) es una superficie equipotencial. En muchos problemas de ingeniería no existen estas superficies físicas de alta simetría y entonces es necesario recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, el estudio de los sistemas de alta simetría brinda un marco conceptual para definir aproximaciones y criterios cualitativos para el análisis preliminar de los problemas.

De los múltiples sistemas de coordenadas que se pueden definir, la práctica ha privilegiado aquellos sistemas llamados de **coordenadas separables**. Estos son sistemas que permiten pasar de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, que surgen de las ecuaciones físicas (en nuestro caso las ecuaciones de Maxwell), a ecuaciones diferenciales a derivadas totales, que son más sencillas de resolver, como veremos en los Capítulos dedicados a la resolución numérica de las ecuaciones del electromagnetismo. Para cada ecuación diferencial a derivadas parciales, hay un número limitado de sistemas donde la ecuación es separable. Por ejemplo, para las ecuaciones de Laplace y Helmholtz, que son las esenciales en el análisis de los problemas electromagnéticos, hay 11 sistemas separables que corresponden a superficies de coordenada constante en la forma de cuádricas confocales¹⁵. De estos sistemas los más conocidos y usados en la práctica de la ingeniería son los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico.



En el **sistema cartesiano** la posición de un punto P en el espacio se describe mediante las proyecciones del vector posición sobre tres ejes rectos mutuamente perpendiculares que se cruzan en el origen de coordenadas¹⁶:

$$P = (x_p, y_p, z_p)$$

Las superficies de coordenada constante son en este caso **planos** normales a la coordenada constante, como el indicado de coordenada x constante.

En el **sistema cilíndrico** la posición de un punto P en el espacio se describe mediante las proyecciones del vector posición sobre un eje recto (que habitualmente se asocia al eje z del sistema cartesiano correspondiente) y el plano perpendicular al eje antedicho que pasa por el origen de coordenadas y además por el ángulo formado por la proyección sobre el plano y un eje recto del plano que pasa por el origen de coordenadas (que habitualmente se asocia al eje x del sistema cartesiano correspondiente):

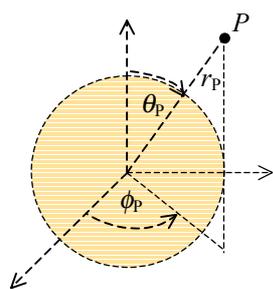
$$P = (z_p, \rho_p, \phi_p)$$

Las superficies de coordenada constante son en este caso **planos** "horizontales" normales a la coordenada z constante, **planos** "verticales" que contienen al eje z para la coordenada ϕ constante y

cilindros coaxiales de radio variable ρ y eje coincidente con z .

¹⁵ P.M. Morse y H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", McGraw-Hill Book Co., New York, (1953) p.518.

¹⁶ En la figura se muestra una **terna derecha**, que es la que usaremos a lo largo del texto.

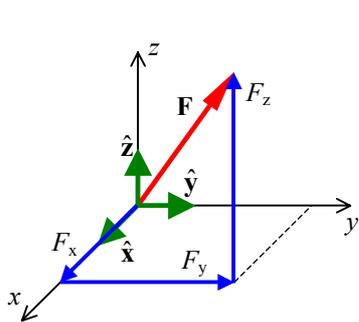


En el **sistema esférico** la posición de un punto P en el espacio se describe mediante el módulo del vector posición y los ángulos que forma con dos ejes perpendiculares que pasan por el origen de coordenadas, que coinciden con los ejes z y x del sistema cartesiano correspondiente.

$$P = (r_p, \theta_p, \phi_p)$$

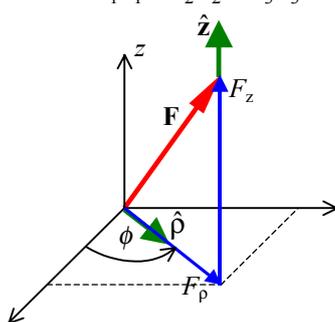
Las superficies de coordenada constante son en este caso **conos** cuyo vértice pasa por el origen de coordenadas para θ constante, **planos** "verticales" que contienen al eje z para la coordenada ϕ constante y **esferas** de radio variable r y origen en el origen de coordenadas.

En un sistema de coordenadas, los vectores se expresan por sus componentes escalares y los versores asociados a cada coordenada: $\mathbf{F} = F_1 \hat{e}_1 + F_2 \hat{e}_2 + F_3 \hat{e}_3$.



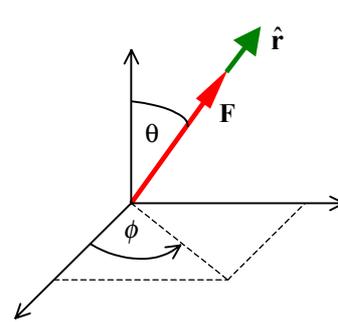
$$\mathbf{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$$

Cartesiano



$$\mathbf{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_z \hat{z}$$

Cilíndrico



$$\mathbf{F} = F_r \hat{r}$$

Esférico

En el **sistema cartesiano** los versores son **constantes** (no dependen de la posición). En los sistemas cilíndrico y esférico los versores **sí** dependen de la posición.

La dependencia de los versores con la posición en sistemas de coordenadas distintos del cartesiano debe tenerse en cuenta al integrar una función vectorial.

Veamos las expresiones matemáticas del vector posición y los elementos de arco, superficie y volumen en los tres sistemas coordenados básicos:

Vector posición

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
$\mathbf{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$	$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$	$\mathbf{r} = r \hat{r}$

Elementos de arco, área y volumen

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
$d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
$dS_x = dy dz$	$dS_\rho = \rho d\phi dz$	$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$
$dS_y = dx dz$	$dS_\phi = d\rho dz$	$dS_\theta = r \sin \theta dr d\phi$
$dS_z = dx dy$	$dS_\rho = \rho d\rho d\phi$	$dS_\phi = r dr d\phi$
$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\phi dz$	$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

El subíndice en los elementos de área representan la coordenada normal a la superficie en consideración.

En el siguiente cuadro se presentan las relaciones entre las coordenadas de los distintos sistemas básicos:

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
x	$= \rho \cos \phi$	$= r \text{sen } \theta \cos \phi$
y	$= \rho \text{sen } \phi$	$= r \text{sen } \theta \text{sen } \phi$
z	$= z$	$= r \cos \theta$
\hat{x}	$= \cos \phi \hat{\rho} - \text{sen } \phi \hat{\phi}$	$= \text{sen } \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \text{sen } \phi \hat{\phi}$
\hat{y}	$= \text{sen } \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi}$	$= \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{r} + \cos \theta \text{sen } \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$
\hat{z}	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \text{sen } \theta \hat{\theta}$
CILINDRICAS	CARTESIANAS	ESFERICAS
ρ	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r \text{sen } \theta$
ϕ	$= \tan^{-1}(y/x)$	$= \phi$
z	$= z$	$= r \cos \theta$
$\hat{\rho}$	$= \cos \phi \hat{x} + \text{sen } \phi \hat{y}$	$= \text{sen } \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$
$\hat{\phi}$	$= -\text{sen } \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$
\hat{z}	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \text{sen } \theta \hat{\theta}$
ESFERICAS	CILINDRICAS	CARTESIANAS
r	$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$= \sqrt{\rho^2 + z^2}$
θ	$= \cos^{-1}(z/r)$	$= \cos^{-1}(z/r)$
ϕ	$= \cotan^{-1}(x/y)$	$= \phi$
\hat{r}	$= \text{sen } \theta \cos \phi \hat{x} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$	$= \text{sen } \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{z}$
$\hat{\theta}$	$= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \text{sen } \phi \hat{y} - \text{sen } \theta \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{\rho} - \text{sen } \theta \hat{z}$
$\hat{\phi}$	$= -\text{sen } \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$

Análisis vectorial

Gradiente

Definición: Sea $f(\mathbf{r})$ un campo escalar diferenciable. El **gradiente** de $f(\mathbf{r})$ es un campo vectorial que se define a través del cambio de la función en un desplazamiento diferencial:

$$f(\mathbf{r}) \Rightarrow df = \text{grad}(f) \cdot d\mathbf{r} = \text{grad}(f)_x dx + \text{grad}(f)_y dy + \text{grad}(f)_z dz$$

El producto escalar entre el vector gradiente de una función escalar y el diferencial de arco es igual al diferencial de la función escalar de la que se calcula el gradiente.

El operador gradiente se puede escribir usando el operador vectorial **nabla** o **del**:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \Rightarrow \text{grad}(f) = \nabla f \Rightarrow df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

Las expresiones del gradiente en los sistemas básicos de coordenadas se muestran en la tabla de la derecha:

CARTESIANAS

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

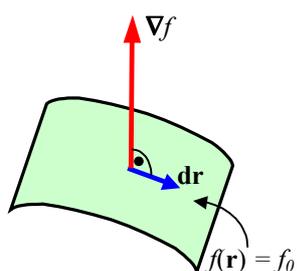
CILINDRICAS

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

ESFERICAS

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

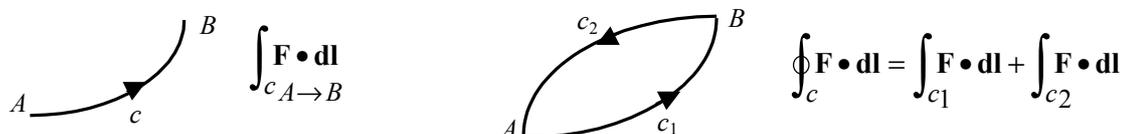
Propiedades del campo gradiente



Una **equipotencial** del campo escalar $f(\mathbf{r})$ es una superficie espacial tal que para todos sus puntos: $f(\mathbf{r}) = f_0$ (constante). Si el vector elemental $d\mathbf{r}$ pertenece a una superficie equipotencial, $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$ y se deduce que el vector gradiente es normal a $d\mathbf{r}$. Como $d\mathbf{r}$ es cualquiera, el gradiente es normal a la superficie misma.

El gradiente del campo escalar $f(\mathbf{r})$ es un campo vectorial normal a las superficies equipotenciales de $f(\mathbf{r})$ en todo punto.

La **circulación de un campo vectorial** a lo largo de una curva c (abierta o cerrada) en el espacio es una **integral de línea** cuyo integrando es la proyección del campo vectorial sobre el elemento de arco punto a punto a lo largo de la línea. En la figura se ilustran dos circulaciones, una sobre una curva abierta y otra sobre una curva cerrada, que puede interpretarse como la suma de dos circulaciones sobre dos curvas sucesivas.



Cuando el campo que circula es un **gradiente**, por definición: $\int_{c_1 \rightarrow 2} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 df = f_2 - f_1$

y la circulación del gradiente depende **exclusivamente** de los valores del campo escalar origen en los **extremos** del intervalo. En particular:

$$\oint_c \nabla f \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Campos conservativos: Un campo vectorial se dice conservativo si su circulación entre dos puntos no depende del camino que se use:

$$\int_{c_1 A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{c_2 A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Por lo tanto **el gradiente es un campo conservativo**.

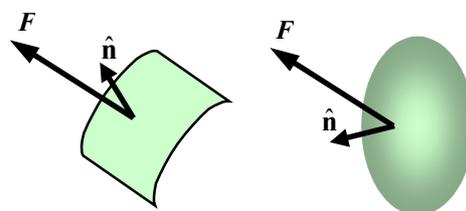
En resumen:

- Gradiente:**
- **campo vectorial normal en todo punto a las superficies equipotenciales de la función escalar origen.**
 - **campo vectorial conservativo.**

Flujo y divergencia

Flujo de un campo vectorial:

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

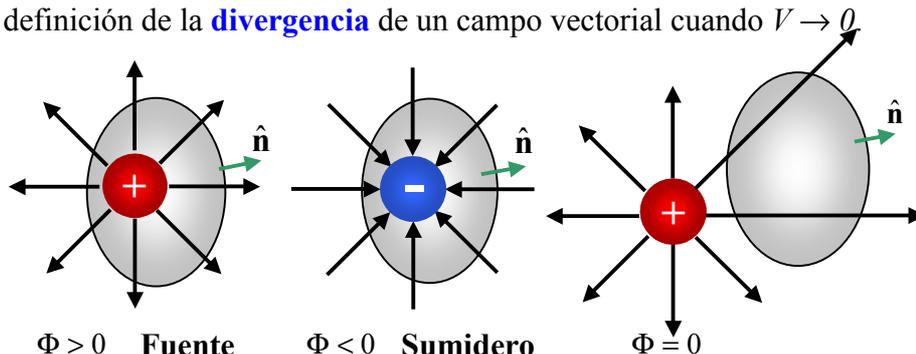


El **flujo de un campo vectorial** a través de una superficie (abierta o cerrada) se define como la integral donde el integrando es la proyección del campo vectorial sobre la normal a la superficie punto a punto de la misma. La propiedad matemática más importante del flujo de una campo vectorial es el

Teorema de Gauss: $\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \text{div } \mathbf{F} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$

Este teorema lleva a la definición de la **divergencia** de un campo vectorial cuando $V \rightarrow 0$

Interpretación física:



Una carga eléctrica produce un campo eléctrico. A su vez, las líneas de campo producen flujo a través de una superficie cerrada. Si la superficie encierra carga, el flujo es no nulo, y su signo coincide con el signo de la carga encerrada. Si la superficie no encierra carga, el flujo es cero.

Por lo tanto el flujo (y la divergencia) está asociado a existencia de carga o fuente de campo. En general podemos demostrar que:

Fuentes escalares del campo: $div \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \rho_F(\mathbf{r})$

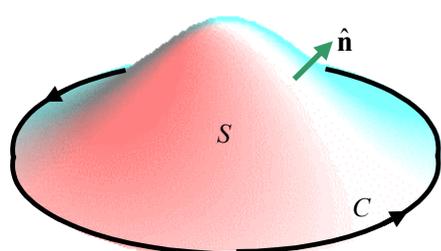
que significa que la divergencia del campo es proporcional a la **densidad de fuentes escalares** de campo punto a punto. La siguiente tabla presenta las expresiones de la divergencia en los distintos sistemas coordenados básicos:

CARTESIANAS	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
CILINDRICAS	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
ESFERICAS	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$

Decimos que un campo es **solenoidal** si su divergencia es nula: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. En este caso **no existen fuentes escalares del campo**, y como las líneas de campo no tienen fuentes o sumideros, **deben ser cerradas**. Un ejemplo de campo solenoidal es el campo magnético.

Rotor

Teorema de Stokes: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$



El teorema de Stokes lleva a la definición del **rotor** de un campo vectorial cuando $S \rightarrow 0$. En esta expresión es importante notar que:

- La superficie S es abierta. Se “apoya” en la curva C
- El sentido de circulación y el sentido de la normal están ligados entre sí por la regla de la mano derecha.

Interpretación física

Así como la divergencia está asociada a las fuentes escalares del campo, el rotor está asociado a sus **fuentes vectoriales**:

Fuentes vectoriales del campo: $\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_F(\mathbf{r})$

En la siguiente tabla se presentan las expresiones del rotor en los sistemas coordenados básicos:

CARTESIANAS	
$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$	
CILINDRICAS	
$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$	
ESFERICAS	
$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\phi \end{vmatrix}$	
$= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$	

Decimos que un campo es **irrotacional** cuando su rotor se anula: $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. En este caso **no existen fuentes vectoriales del campo**. Un ejemplo de campo irrotacional es el campo eléctrico. Por el teorema de Stokes un campo irrotacional da circulación nula sobre una curva cerrada. Entonces decir que un campo es irrotacional es lo mismo que decir que es **conservativo**.

Laplaciano

El **laplaciano** es el operador que resulta de tomar la divergencia del gradiente. Opera sobre un campo escalar:

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \text{div}[\text{grad}(f(\mathbf{r}))] = \nabla \cdot [\nabla f(\mathbf{r})]$$

El laplaciano es un operador fundamental de las ecuaciones del electromagnetismo.

La siguiente tabla presenta las expresiones del laplaciano en los sistemas de coordenadas básicos:

CARTESIANAS	$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$
CILINDRICAS	$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$
ESFERICAS	$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$

Ecuaciones de Poisson y Laplace

La ley de Gauss de la electrostática y la relación entre el campo y el potencial electrostáticos lleva a la **ecuación de Poisson**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \Rightarrow \nabla \cdot [-\nabla \phi(\mathbf{r})] = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

La ecuación de Poisson relaciona el potencial eléctrico con sus **fuentes escalares**.

Para puntos del espacio **sin fuentes**, se obtiene la **ecuación de Laplace**: $\nabla^2\phi(\mathbf{r})=0$

Desde el punto de vista matemático, la ecuación de Poisson es una ecuación diferencial lineal inhomogénea. Su **solución general** es la suma de la solución general de la ecuación homogénea (ecuación de Laplace) más una solución particular de la ecuación inhomogénea original:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \\ \nabla^2\phi_h(\mathbf{r}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \phi_h(\mathbf{r}) + \phi_p(\mathbf{r})$$

La solución particular más usada es la llamada **integral de Poisson**:

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}')}{R} dV \quad \text{con} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

donde el recinto de integración debe contener por completo a las fuentes de campo cuya influencia se quiera determinar y se ha usado la notación de punto fuente (donde están distribuidas las fuentes) y punto campo (donde se desea calcular el efecto, o sea el potencial).

Teorema de Green

Las llamadas **identidades de Green** son expresiones matemáticas derivadas del teorema de la divergencia que son de utilidad para analizar problemas de potencial y de radiación.

Sea V una región cerrada del espacio cuya frontera es S . Sean además $\phi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ dos campos escalares que junto con sus derivadas primeras y segundas son funciones continuas dentro de V .

Consideremos el teorema de la divergencia aplicado al campo vectorial $\psi\nabla\phi$:

$$\int_V \nabla \cdot (\psi\nabla\phi) dV = \oint_S (\psi\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Como: $\nabla \cdot (\psi\nabla\phi) = \nabla\psi \cdot \nabla\phi + \psi\nabla^2\phi$ se obtiene la llamada **primera identidad de**

Green:

$$\int_V \nabla\psi \cdot \nabla\phi dV + \int_V \psi\nabla^2\phi dV = \oint_S (\psi\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$$

donde $\partial\psi/\partial n$ es la derivada direccional normal a la superficie.

Consideremos ahora en esta expresión que $\psi = \phi$, y que ϕ sea solución de la ecuación de Laplace dentro de V , de manera que nos queda:

$$\int_V (\nabla\phi)^2 dV = \oint_S (\phi\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$$

Intercambiamos los roles de los campos escalares, y escribimos ahora la primera identidad de Green al campo vectorial $\phi\nabla\psi$:

$$\int_V \nabla\phi \cdot \nabla\psi dV + \int_V \phi\nabla^2\psi dV = \oint_S \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS$$

Restamos las dos expresiones de la primera identidad para obtener la **segunda identidad o teorema de Green**:

$$\int_V (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi) dV = \oint_S \left(\psi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) dS$$

Fuentes del campo y teorema de Helmholtz

El **teorema de Helmholtz**, que presentamos sin demostración¹⁷, relaciona a un campo vectorial con sus fuentes:

Si	$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r})$	y	$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r})$
Entonces	$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Psi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{K}(\mathbf{r})$		
con	$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{R} dv'$	y	$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}')}{R} dv'$
donde	$R = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$		

El teorema de Helmholtz muestra que todo campo vectorial está unívocamente definido si se conocen su divergencia (fuentes escalares) y su rotor (fuentes vectoriales).

Identidades vectoriales

A continuación se presenta una tabla de identidades matemáticas que surgen de la aplicación de los operadores vectoriales vistos.

$\nabla \times (\nabla f) = 0$	$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$		
$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$	$\nabla \times \mathbf{r} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}/r$	$\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$
$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$	$\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = \phi\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla\phi$	$\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = \phi\nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla\phi$	
$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$			
$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$			
$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$			
$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$ (Laplaciano vectorial)			

Expresiones integrales:

Gauss	$\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv$	$\oint_S f \hat{\mathbf{n}} ds = \int_V \nabla f dv$
Stokes	$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$	$\oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) ds = \int_V \nabla \times \mathbf{F} dv$

¹⁷ Ver, por ejemplo, W.K.H.Panofsky & M.Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", 2nd. Ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1962), p.2-5.